www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail

ECOLE NATIONALE DES PONTS ET CHAUSSEES,
ECOLES NATIONALES SUPERIEURES DE L'AERONAUTIQUE ET DE L'ESPACE,
DE TECHNIQUES AVANCEES, DES TELECOMMUNICATIONS,
S MINES DE PARIS, DES MINES DE SAINT-ETIENNE, DES MINES DE NANCY,
DES TELECOMMUNICATIONS DE BRETAGNE,
ECOLE POLYTECHNIQUE
(Option T.A.)

CONCOURS D'ADMISSION 1990

MATHEMATIQUES

PREMIERE EPREUVE
OPTIONS M, P', T.A.
(Durée de l'épreuve : 4 heures)

PARTIE I

Etude d'un endomorphisme de l'espace des polynômes réels

Soit φ l'application qui, à un polynôme réel P, fait correspondre le polynôme $\varphi(P)$ défini par la relation :

$$\varphi(P)(X) = P(X + 1) + P(X) .$$

I.1 Vérifier brièvement que φ est un endomorphisme de l'espace des polynômes réels $\mathbb{R}[X]$ et déterminer la seule valeur propre de φ . Déterminer le sous-espace propre associé E .

I.2.a. Déterminer le noyau de l'application φ . Peut-on en conclure que φ est un automorphisme de $\mathbb{R}[X]$?

b. Démontrer que l'espace vectoriel $\mathbb{R}_n[X]$ des polynômes réels de degré inférieur ou égal à n est stable par φ .
Montrer que la restriction φ_n de φ à $\mathbb{R}_n[X]$ est un automorphisme.

c. Démontrer que φ est un automorphisme de $\mathbb{R}[X]$.

I.3.a. Démontrer que $\mathbb{R}[X]$ est égal à la somme directe du sous-espace vectoriel E et du sous-espace vectoriel $X\mathbb{R}[X]$, ensemble des polynômes égaux aux produits du polynôme X et d'un polynôme quelconque de $\mathbb{R}[X]$.

b. Démontrer que la restriction de $\varphi - 2\mathrm{Id}$ à $X\mathbb{R}[X]$ est une application injective.
En déduire que la restriction de $\varphi - 2\mathrm{Id}$ à $X\mathbb{R}_{n-1}[X]$ est une application bijective à valeurs dans $\mathbb{R}_{n-1}[X]$. Donner une inégalité entre le degré du polynôme P et celui du polynôme $(\varphi - 2\mathrm{Id})(P)$.

c. En déduire qu'il existe une suite de polynômes (U_n) $n = 0, 1, 2, \ldots$ vérifiant les relations : $U_0 = 1$;

pour tout n entier, $n \geqslant 1$: $U_n(0) = 0$, $U_n(X + 1) = U_n(X) + U_{n-1}(X)$.

Préciser le degré de U_n et le terme dominant.

d. Soient n et p deux entiers naturels tels que $p+1 \leqslant n$. Calculer $U_n(p)$. En déduire l'expression du polynôme U_n. Vérifier que la suite (U_n) $n = 0, 1, 2, \ldots$ est une base de $\mathbb{R}[X]$.

I.4 Déterminer la matrice de la restriction de l'application φ à $\mathbb{R}_n[X]$, muni de la base (U_k) $k = 0, 1, \ldots, n$.

PARTIE II

Définition et propriétés d'une série de polynômes P_n

II.1 En utilisant par exemple les résultats établis dans la première partie, prouver l'existence et l'unicité d'une suite de polynômes (P_n) $n = 0, 1, 2, \ldots$ de $\mathbb{R}[X]$ telle que l'image par φ de P_n est le polynôme $2X^n$. Préciser le degré de P_n et son terme dominant. Calculer P_0, P_1, P_2 . Comparer $P_n(0)$ et $P_n(1)$.

TOURNEZ S'IL VOUS PLAIT

II.2.a. Démontrer : pour tout entier naturel n et tout réel x , $P_n(1 - x) = (-1)^n P_n(x)$.

En déduire les valeurs de $P_{2n}(0)$, $P_{2n}(1)$ et $P_{2n+1}\left(\frac{1}{2}\right)$.

b. Démontrer : pour tout entier n, $n \geqslant 1$, $P_n' = nP_{n-1}$.

Calculer P_3, P_4, P_5 .

c. Dresser le tableau des variations des restrictions des fonctions polynômes P_n à l'intervalle [0,1] (on pourra utiliser une récurrence sur n).

II.3 Démontrer que pour tout entier naturel n et pour tout couple de réels (x,y), on a la relation :

$$P_n(x + y) = \sum_{k=0}^{n} C_n^k \, P_{n-k}(x) \, y^k \ .$$

C_n^k est le coefficient binomial ; on pose $p_n = P_{2n+1}(1)$;

établir la relation de récurrence : $$p_n = \frac{1}{2}\left(1 - \sum_{k=0}^{n-1} C_{2n+1}^{2k+1} \ p_k\right) .$$

II.4 Développement en série trigonométrique des fonctions polynômes P_n sur l'intervalle [0,1] .

a. Soit g la fonction périodique de période égale à 2, paire, prenant mêmes valeurs que P_1 sur l'intervalle [0,1]. Développer g en série de Fourier, en déduire les valeurs des sommes des séries S_1 et S_2 :

$$S_1 = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} \ , \quad S_2 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \ .$$

b. Etablir, pour tout x de l'intervalle [0,1], et tout entier k, $k \geqslant 1$, les relations :

$$P_{2k-1}(x) = (-1)^k \frac{4}{\pi^{2k}} (2k - 1)! \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos(2n+1)\pi x}{(2n+1)^{2k}} \ .$$

Préciser la convergence des séries considérées ; en déduire pour tout x de l'intervalle [0,1] et tout entier naturel, l'inégalité :

$$|P_n(x)| \leqslant \frac{n!}{2\pi^{n-1}} \ .$$

II.5 Etablir pour tout entier naturel l'encadrement :

$$1 \leqslant \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^{2n+2}} \leqslant 1 + \frac{1}{2(2n+1)} \ .$$

En déduire un équivalent simple de p_n lorsque n tend vers l'infini.

II.6 Etablir l'inégalité vérifiée pour tout réel x et tout entier naturel n : $$|P_n(x)| \leqslant \frac{n! \ e^{\pi|x|}}{2\pi^{n-1}} \ .$$

PARTIE III

Deux méthodes pour obtenir la série entière dont la somme est th(z/2)

III.1.a. Soit z un nombre complexe donné $|z| < \pi$; soit la série de fonctions de terme général $x \mapsto P_n(x) \frac{z^n}{n!}$. Etablir que cette série de fonctions est convergente pour toute valeur réelle de x ;

on notera θ la fonction somme de la série : $$\theta(x) = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(x) \frac{z^n}{n!} \ .$$

TOURNEZ S'IL VOUS PLAIT

b. Soit a un réel strictement positif ; établir que la fonction θ est continûment dérivable dans l'intervalle $[-a, +a]$ et vérifie une équation différentielle.

Comparer $\theta(0)$ et $\theta(1)$ et déterminer $\theta(x)$.

III.2 Soit D_π le disque ouvert du plan complexe de centre O et de rayon π.

a. Quel est le rayon de convergence de la série entière de terme général

$$p_n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} \ ?$$

b. En comparant les deux expressions de $\theta(1)$ obtenues, déterminer la série entière dont la somme est égale, pour tout nombre complexe z du disque D_π, à $\text{th}(z/2)$.

c. En déduire une expression du développement en série entière de tan z, développement valable pour tout nombre complexe z de module inférieur à $\frac{\pi}{2}$.
Retrouver à l'aide de cette expression, les trois premiers termes différents de zéro du développement limité de la fonction tan en O .

III.3.a. Soit n un entier, $n \geqslant 1$; soit f une fonction à valeurs complexes définie sur $[0,1]$ de classe C^{2n+1} .

Etablir la relation :

$$\int_0^1 P_{2n+1}(t)\, f^{(2n+1)}(t)\, dt = p_n(f^{(2n)}(0) + f^{(2n)}(1)) + 2n(2n+1) \int_0^1 P_{2n-1}(t)\, f^{(2n-1)}(t)\, dt \ .$$

En déduire l'égalité :

$$\int_0^1 f(t)\, dt = \sum_{k=0}^{n} \frac{p_k}{(2k+1)!} (f^{(2k)}(0) + f^{(2k)}(1)) - \frac{1}{(2n+1)!} \int_0^1 P_{2n+1}(t)\, f^{(2n+1)}(t)\, dt \ .$$

b. Soit n un entier, $n \geqslant 1$; soit f une fonction à valeurs complexes définie sur $[0,1]$ de classe C^{2n} .

Démontrer qu'il existe un réel ξ de l'intervalle $[0,1]$ tel que :

$$\int_0^1 f(t)\, dt = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{p_k}{(2k+1)!} (f^{(2k)}(0) + f^{(2k)}(1)) + 2p_n \frac{f^{(2n)}(\xi)}{(2n+1)!} \ .$$

III.4 Retrouver à l'aide des résultats précédents et de la fonction $t \mapsto e^{zt}$ la série entière dont la somme dans le disque D_π est $\text{th}(z/2)$.

FIN DU PROBLEME

www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail